Teoria dei Sistemi

Prof.ssa. Pallottino Lucia — 2 Marzo 2015

Elisa Scotti

Informazioni sul corso "centro E. PIAGGIO": Materiale utile in PDF e 2 libri di testo
Esame: • scritto → su carta e computer (per i calcoli) — utile stampare le dispense.
• orale
Gruppo del corso: STUDENTI_TDS_LHE_UNIPI sulla quale dovremo registrarci.
Ricevimento: Mercoledì pomeriggio nel centro piaggio POLO A

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Teoria dei sistemi o fondamenti di automatica

parleremo di APPARATI "Sistemi da far funzionare al meglio"
es: caldaie e raffreddamento con aria condizionata ecc.

ⓐ PROCESSO — è il sistema dinamico in questione che evolve nel tempo che vorremmo far funzionare in un certo modo. es. macchina

ⓑ RIFERIMENTO — è l'evoluzione nel tempo che vorremmo che il processo seguisse es. è la distanza dalla carreggiata, che è possibile cambiare

variabili di controllo e ⓐ e variabili controllate e ⓑ → sulle quali possiamo agire
→ come agire su queste variabili può essere di facile o difficile risoluzione.
I problemi nella pratica sono legati:

- al MODELLO del sistema (del processo) con il quale riusciamo a semplificare
- gestione del MODELLO stesso e non del problema reale.
- Per conoscere le variabili abbiamo bisogno di SENSORI ed anche dell'ATTUAZIONE che modifica il sistema stesso es. i motori.
  ↓
  con i loro margini di errori che dovremo prevedere.

Robotica & Automazione → disciplina che si occupa di descrivere sistemi diversi.

≐ Modo per gestire un COMPITO in modo AUTOMATICO (come se lo facesse un uomo stesso) senza intervento umano

- ▫ la MISURA
- ▫ la ATTUAZIONE
- ▫ il CONTROLLO

} i 3 ingredienti fondamentali (i 3 blocchi) che vengono controllati dall'automazione stessa

La Robotica invece è qualcosa di più → "ROBOTA" ≐ lavoratore subordinato o schiavo

Robot ≐ qualcosa che vive indipendentemente dall'uomo — le 3 leggi fondamentali della robotica (1940 Asimov)
oggi è una scienza e una tecnologia → nasce negli anni 60 e noi lo mette in soffitte

Componenti dei robot: - struttura meccanica
- attuatori
- sensori
- sistemi di controllo
- rifornimento energetico

} quello di cui ci occuperemo

È una materia multidisciplinare!

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

Cap. 2 Sistemi Dinamici

9 Marzo 2015

÷ Sistemi che evolvono nel tempo.

1) Scegliere il modello
2) Vedere come il modello evolve nel tempo e simularlo.
3) Possiamo anche correggerlo → si può agire sul sistema facendo sì che il sistema si comporti "bene" nel tempo

(es) Popolazione italiana

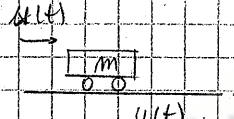
Alcune informazioni le posso ricavare dal sistema, altre le posso inserire ecc.
A seconda del sistema possiamo avere un modello.

2 tipologie di sistemi dinam:

- a livello CONTINUO → vogliamo sapere istante per istante TEMPO CONTINUO
  Rappresentabili attraverso:
  ↓
  Equazioni differenziali (ordinarie) → ODE
  non coinvolgono le eq. diff. parziali $\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]$
  ma quelle totale $\left[\frac{df(x,y)}{dt}\right]$

- a livello DISCRETO → TEMPO DISCRETO
  ↓
  Equazioni alle differenze = usate per descrivere matem. le leggi che legano grand. continue variab. influenzate da una variab. ind. discr. che procede "a salti"

Esempi di sist. dinamici in tempo CONTINUO: (TC)

(es) 

1) Questa equazione $u(t) = m\,\ddot{y}(t)$

per trovare come si comporta il sistema sottoposto alla forza dobbiamo integrarla 2 volte

$\vec{F} = m\,\vec{a}$

2) Se il sistema è sottoposto anche alla Legge di Hooke (k) $\hat{y}$ riposo della massa.

$$\ddot{y}(t) = -\frac{k}{m}\left(y(t) - \hat{y}\right) + \frac{1}{m}u(t)$$ Proviene da: $u(t) = m\ddot{y} + \underbrace{k(y-\hat{y})}_{\vec{F}_{el}}$

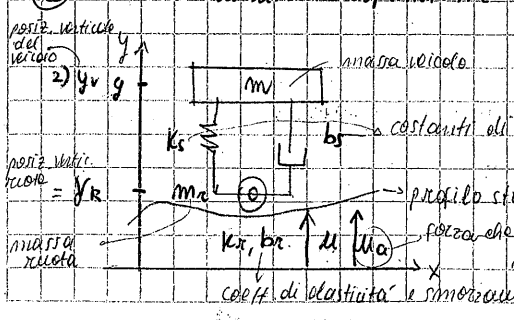
derivata massima da esplicitare → poiché ci dice l'ORDINE dell'eq. differenziale
In questo caso entra anche la posizione

3) Con effetto dello smorzatore ⇒ fattore aggiuntivo che dipende dalla velocità → Rayleigh

$$\ddot{y}(t) = -\frac{b}{m}\dot{y}(t) - \frac{k}{m}\left(y(t) - \hat{y}\right) + \frac{1}{m}u(t)$$

se inoltre il corpo è collegato ad uno smorz. viscoso di cost. dissipativa.

(es) Modello di una sospensione di una macchina in un solo asse x-y



Il profilo della strada è diverso

Vogliamo capire la posizione di m rispetto alla ruota

1) $\ddot{y}(t) = -\frac{b}{m}\dot{y}(t) - \frac{k}{m}y(t) + \frac{b}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t)$ → dipende sia dalla posizione che dalla velocità (anche con cui cambia la strada)

$\frac{k}{m}(u(t) - y(t))$ ↳ differenza

2) Per rendere il modello un pó più realistico ⇒ considero anche la massa della ruota

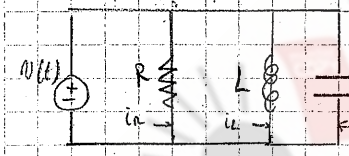
⇒ Forza di ingresso relativa al pneumatico → Abbiamo 2 equazioni e non più una.

$$\begin{cases} \ddot{y}_{v\,(\text{sul veicolo})} = \frac{u_a}{m_v} - \frac{b_1}{m_v}(\dot{y}_v - \dot{y}_R) - \frac{k_1}{m_v}(y_v - y_R) \\ \ddot{y}_{R\,(\text{sulla ruota})} = -\frac{u_a}{m_R} - \frac{b_1}{m_R}(\dot{y}_R - \dot{y}_v) - \frac{k_1}{m_R}(y_R - y_v) - \frac{b_R}{m_R}(\dot{y}_R - \dot{u}_a) - \frac{k_R}{m_R}(y_R - u_a) \end{cases}$$

(le forze sono opposte per il III° Princ) ↳ quanto viene schiacciata; [Interazione tra ruota e strada]

Sistema tra le due. b_R lo smorzamento

Esempio: Circuiti elettrici : Leggi di Ohm, Faraday, Henry



$v(t) = Ri(t) \Rightarrow i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ } sono descritte da
eq. algebrica non richiede eq. differenziali
$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ }

Per LKC (nodo): $i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t) \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \ddot{v}C + \frac{\dot{v}}{R} + \frac{v}{L}$

(TD)

Esempio: Calcolo degli interessi bancari (es di un sistema a tempo discreto) per la tensione vale

$x(t)$ = soldi
α = tasso di interesse, > 1 affinché il capitale aumenti $\alpha > 1$

$\boxed{x(t+1) = \alpha x(t)}$ rappresenta l'andamento dei soldi

Prima la variaz. era il tempo $\alpha = \beta + 1 = \beta x(t) + x(t)$

Esempio: crescita delle popolazioni → Un modello molto usato é utilizzando le coorti (= fasce di età)

$x_i(t)$ = n° individui per coorte i coorte 1 fascia : $[0, 5]$
" 2 " : $(5, 10]$
" 3 " : $(10, 15]$
⋮

Vogliamo capire come sarà $x_i(t+1) = \beta_{i-1}\, x_{i-1}(t)$ con $i = 2, \dots, n$

Il β tiene conto sia del fattore di crescita, che di quello di mortalità.

$x_i(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$ Quindi abbiamo $(n-1)$ differenze.

Sono tutti fattori accoppiati

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

$$x^+ = x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

MASTER COPY
Tel. 050 8312126
Cell. 388 9837745

$x(k) = a * x(k-1) + b$ x ora è un vettore che piano piano si riempie.

Quindi alla fine abbiamo un sistema che tiene conto anche dei valori vecchi! teniamo la traccia dell'evoluzione determinando un vettore dei tempi

Nelle dispense uguale ma abbiamo approssimato la derivata di i

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t) + \frac{1}{L} v(t)$$

$$\frac{i(k+1) - i(k)}{T} = -\frac{R}{L} i(k) + \frac{1}{L} v(k) \Rightarrow \boxed{i(k+1) = \left(1 - \frac{R}{L} T\right) i(k) + \frac{T}{L} v(k)}$$

Il ciclo FOR ci consente di vedere come cambia nel tempo.

Il sistema finale era: $\begin{cases} x_i(t+1) = \beta_{i-1}\, x_{i-1}(t) \\ x_1(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t) \end{cases}$

Esempio: Programma di calcolo (MATLAB)

```
a = 0,5 ;
b = 1   ;
x = 0   ;
FOR t = 0 : 20
    PLOT (t, x, 'b')        % disegna un punto, oppure *, di colore blu
    x = a * x + b
    HOLD ON                 % fondamentale per mantenere la figura
END
```

HELP PLOT → per istruzioni

FOR t = [n] : [n] : [n] .... END — ciclo FOR

variabile — valori (numeri)

Esempio: FOR v = 1 : (2) : 20

passo — la x arriva fino a (20 − 1) = 19

da che valore parte v — l'incremento è 0,001 — non assumerà mai il valore 2

(2)

v = 1 : 20 → da per scontato che l'incremento sia di 1

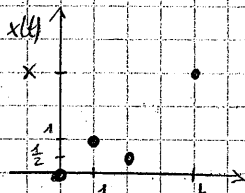
☺ Mettere sempre tutti e 3 i valori

t ha un valore intero e sempre più grande di 1. PLOT = fa il GRAFICO.

asse (x) → variab. t

asse (y) → la x

t = tempo



$x = a * x + b$

$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}(0) + 1 = 1$

Nel comando successivo non teniamo conto di quello precedente.

$x = -\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 = \frac{1}{2}$

HOLD OFF — opposto per ricominciare

GRID ON — Mettere una griglia

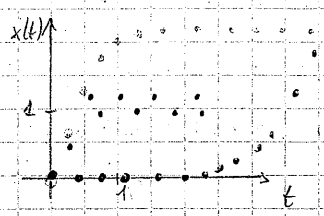
questo programma realizza un SOLO che è possibile descrivere completamente con la soluzione alle differenze ← $x(t+1) = a x(t) + b$, $x(0) = 0$ da dove parte

Questo algoritmo rappresenta un sistema dinamico in tempo discreto

Programma che SIMULA il comportamento di quel sistema che fa tra 0 e 20.

con $0 \le t \le 20$

A seconda di a e b possiamo avere comportamenti molto differenti



(es) $a = \frac{1}{2}$ $b = 1$ ...

(es) $a = \frac{3}{2}$ $b = 1$

(es) $a = -\frac{1}{2}$ $b = -1$ oscilla

Esempio: Mappa logistica (p. 24) — Modello leggermente più complesso per l'andamento delle popolazioni che dipende anche da quanti sono

$x(k+1) = r\, x(k)\,(1 - x(k))$, $x(0) = x_0$ — eq. NON lineare — dipende da x!

↓ tasso che combina sia la riproduzione che la mortalità →

per $r \in [0, 1]$ => cresce sempre andando a quel valore => pop. si estingue $\forall x_0$

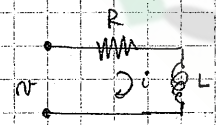
$r \in [1, 2]$ => converge rapidamente a $\frac{r-1}{r}$ $\forall x_0$

$r \in [2, 3]$ => converge ma oscillando

$r > 3{,}57$ => comportamento caotico delle soluzioni

Una applic. imp. delle eq. alle diff. (i.e. Sist. TD) è nella simulazione numerica della evoluzione di sistemi fisici continui

Sistemi TD per la simulazione numerica



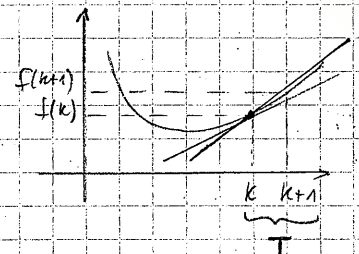
Eq. diff che regge il sistema

$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i + \frac{1}{L} v$

Dovremo approssimare la derivata con il Metodo di (delle differenze) Eulero in avanti

da $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

$f(k) \approx \frac{f(k+1) - f(k)}{T}$



Approssimiamo la pendenza della retta tang (bianca) con quella rossa.

La scelta di T è fondamentale = TEMPO di INTEGRAZIONE

$t = kT$ con $k = 0, 1, 2, \ldots$

Nel programma che implementa il circuito, abbiamo delle indicazioni leggermente ≠:

$t_vec = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}1 \\ 0{,}2 \\ 0{,}3 \\ \vdots \\ 9{,}9 \\ 10 \end{pmatrix}$

t_VEC = 0 : T : T_FIN vettore dei tempi

↓ "vector"

Nel ciclo FOR sarebbe scritto: FOR k=1 : LENGTH (t_vec) ... il continuo è nella pagina successiva